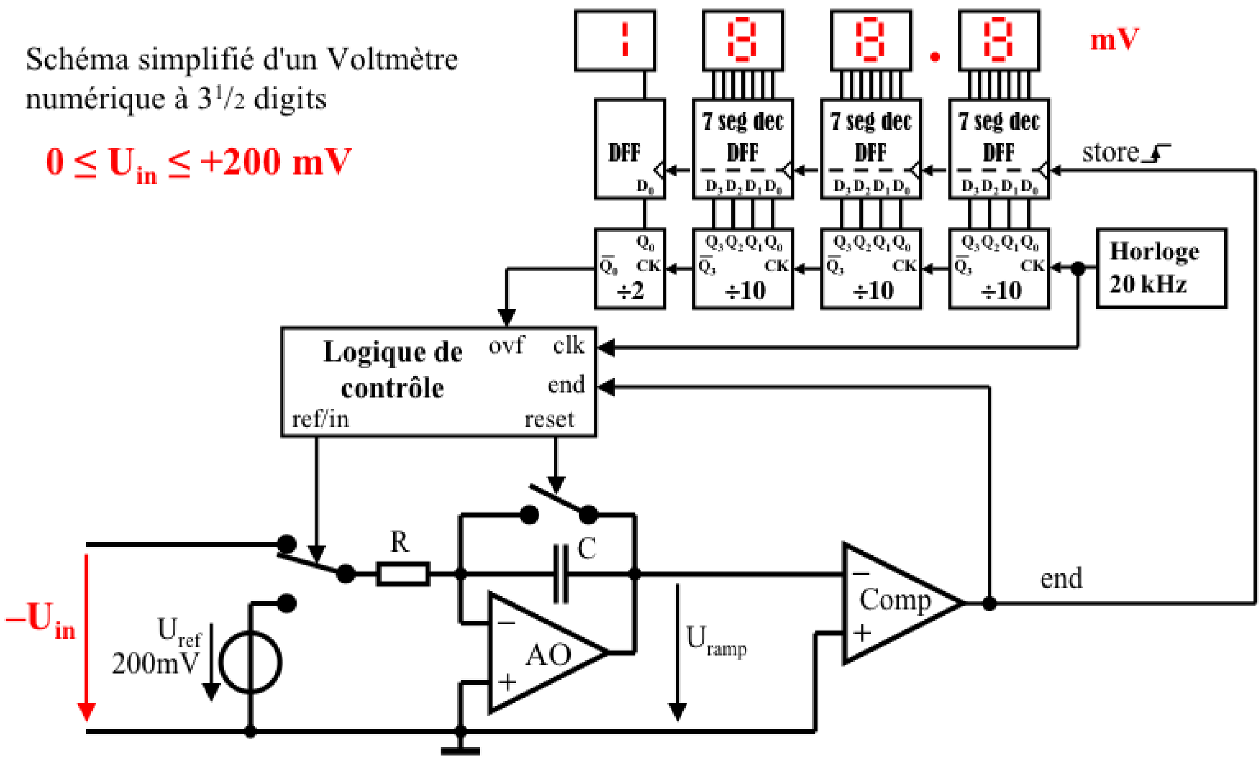
EXERCICE CONVERTISSEURS A-N à DUAL RAMPE

Convertisseur A-N à double rampe pour Volt-mètre 3 ½ Digits

Le schéma simplifié ci-dessous est celui d'un ADC intégré, à l'exception de R et C, pour Voltmètre à affichage numérique à 2000 points.



Déterminer :

a) la relation entre le nombre affiché N_{out} et U_{in}, en supposant l'AO et le comparateur parfaits;

b) le nombre de mesures par seconde;

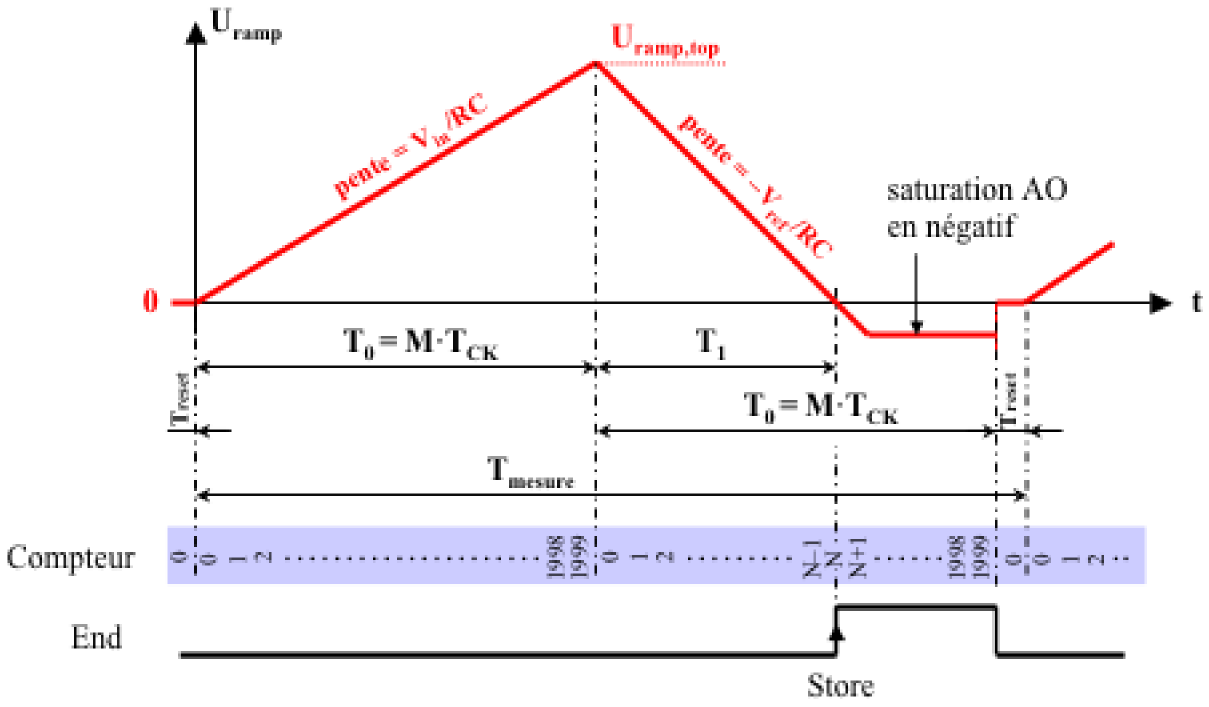
c) la valeur de la constante d'intégration RC pour que U_{ramp} ne dépasse jamais 3 V;

d) 'influence d'un signal parasite purement alternatif, à 50 Hz, superposé à U_{in};

e) les principales causes d'erreur de mesure.

Corrigé

Fonctionnement:



a) Comme il y a trois compteurs par 10 en cascade suivis d'un compteur par 2, cela forme un compteur par M = 2·10·10·10 = 2000, codé en BCD (binaire codé decimal).

Hauteur de la rampe montante :

$$U_{ramp,top} = \frac{U_{in}}{RC} \cdot T_0 = \frac{U_{in}}{RC} \cdot M \cdot T_{CK}$$

Equation de la rampe descendante :

$$U_{ramp}(t) = U_{ramp,top} - \frac{U_{ref}}{RC} \cdot t$$

Temps pour que la rampe descendante arrive à zéro :

$$T_1 = RC \cdot \frac{U_{ramp,top}}{U_{ref}} = \frac{U_{in}}{U_{ref}} \cdot M \cdot T_{CK}$$

Etat du compteur mémorisé dans les FFs au moment où la rampe croise 0V:

$$N_{out} = \mathrm{entier}\frac{T_1}{T_{CK}} = \mathrm{entier}\left(M \cdot \frac{U_{in}}{U_{ref}}\right) = \mathrm{entier}\left(2000 \cdot \frac{U_{in}[\mathrm{mV}]}{200[\mathrm{mV}]}\right) = 10 \cdot U_{in}[\mathrm{mV}]$$

Comme on affiche un point décimal avant le digit de poids faible, celui-ci représente des dixièmes, et on lit donc directement des mV avec une résolution de 0.1 mV.

b)

$$T_{mesure} = 2 \cdot M \cdot T_{CK} + T_{reset} = 4000 \cdot T_{CK} + T_{resett}$$

Si l'opération de remise à zéro ne dure que quelques périodes d'horloge :

$$T_{mesure} \approx 4000 \cdot T_{CK} = 0.2 \text{ s}$$

On fait donc pratiquement 5 mesures par seconde.

c) On veut que la rampe ne dépasse pas $U_{ramp,top,max} = 3\,V$. Or :

$$U_{ramp,top,max} = \frac{U_{in,max}}{RC} \cdot T_0 = \frac{U_{ref}}{RC} \cdot M \cdot T_{CK}$$

$$RC = \frac{U_{ref}}{U_{ramp,top,max}} \cdot M \cdot T_{CK} = 6.7\,ms$$

d) Tout signal d'entrée parasite alternatif périodique, de fréquence 50 Hz, est une somme de sinus de fréquence égale aux multiples entiers de 50 Hz. Ce parasite sera intégré durant $T_0 = M{\cdot}T_{CK} = 0.1$ s, ce qui correspond exactement à un multiple entier des périodes de tous ces sinus; donc l'intégrale du parasite sera nulle, et il n'aura pas d'influence sur le résultat de la mesure.

e) Les principales causes d'erreur sur la mesure sont:

1. L'imprécision de la tension de référence, qui correspond à une erreur de gain, donc à une erreur relative sur la valeur affichée égale à l'erreur relative sur la référence.
2. L'offset U_{io} de l'ampl op, qui produit à la sortie de l'intégrateur un terme:

   $$U_{io} + \frac{1}{RC}\int U_{io} \cdot dt$$

   En exprimant que la montée + la descente = 0, on a :

   $$U_{io} + \frac{U_{io}}{RC} \cdot T_0 + \frac{U_{in}}{RC} \cdot T_0 + \frac{U_{io}}{RC} \cdot T_1 - \frac{U_{ref}}{RC} \cdot T_1 = 0$$

   On en tire :

   $$T_1 = T_0 \cdot \frac{U_{in} + U_{io}(1 + RC/T_0)}{U_{ref} - U_{io}}$$

   Donc :

   $$N_{out} = \text{entier}(2^n \cdot \frac{U_{in} + U_{io}(1 + RC/T_0)}{U_{ref} - U_{io}})$$

   Ce qui correspond à une erreur relative sur le résultat d'environ U_{io}/U_{ref} , plus une erreur systématique (offset) à peu près égale à U_{io} , car $RC/T_0 << 1$.
3. L'offset U_{io} du comparateur produit une erreur sur T_1, donc sur N_{out} :

   $$T_1 = RC \cdot \frac{U_{ramp,top} - U_{io}}{U_{ref}} = \frac{U_{in}}{U_{ref}} \cdot T_0 - \frac{U_{io}}{U_{ref}} \cdot RC$$

   $$N_{out} = \text{entier}(RC \cdot \frac{U_{ramp,top} - U_{io}}{U_{ref}}) = \text{entier}(\frac{U_{in}}{U_{ref}} \cdot M - \frac{U_{io}}{U_{ref}} \cdot \frac{RC}{T_0} \cdot M)$$

   Ce qui donne une erreur systématique sur l'affichage bien inférieure à la tension d'offset du comparateur, car $RC/T_0 << 1$.

EXPLICATIONS SUPPLEMENTAIRES

Point a)

Idée centrale : on convertit une **tension** en un **temps**

- Phase 1 : on intègre une tension inconnue (U_{in}) pendant un temps connu (T_0)
- Phase 2 : on intègre une tension connue (U_{ref}) pendant un temps inconnu (T_1) (que l'on mesure)
  T1 est l'image numérique de Uin.

On peut déduire *N_{out}* selon 2 méthodes :

Méthode 1 : Déduction de *N_{out}* par les pentes (hauteur identique) : les deux rampes atteignent la même "hauteur" (le même pic), donc on égalise les variations de tension obtenues avec les pentes.

Étape A — pente de montée pendant T_0

Le montage est un intégrateur : quand on applique $-U_{in}$ (avec $U_{in} \geq 0$), la sortie monte linéairement.

$$\text{pente}_{\uparrow} = \frac{U_{in}}{RC}$$

Après le temps fixe $T_0 = MT_{CK}$, la hauteur atteinte est :

$$U_{ramp,top} = \text{pente}_{\uparrow} T_0 = \frac{U_{in}}{RC} T_0$$

Étape B — pente de descente pendant T_1

En phase 2, on connecte l'intégrateur à U_{ref} : le cours indique une décroissance linéaire de pente $-V_{ref}/(RC)$.

$$\text{pente}_{\downarrow} = -\frac{U_{ref}}{RC}$$

Étape C — "même hauteur" ⇒ relation entre T_1 et T_0

Pendant la descente, on part de $U_{ramp,top}$ et on descend jusqu'à 0. La variation de tension (en valeur absolue) est donc :

$$U_{ramp,top} = |\text{pente}_{\downarrow}|\ T_1 = \frac{U_{ref}}{RC} T_1$$

Donc :

$$T_1 = \frac{RC}{U_{ref}} U_{ramp,top}$$

et en remplaçant $U_{ramp,top} = \frac{U_{in}}{RC} T_0$:

$$T_1 = \frac{U_{in}}{U_{ref}} T_0$$

Étape D — N_{out} est un comptage de coups d'horloge pendant T_1

Le compteur compte à la période T_{CK} pendant la phase 2, et on mémorise la valeur à l'instant où U_{ramp} recroise 0 V.

Ainsi :

$$N_{out} = \text{entier}\left(\frac{T_1}{T_{CK}}\right) = \text{entier}\left(\frac{U_{in}}{U_{ref}} \frac{T_0}{T_{CK}}\right) = \text{entier}\left(M \frac{U_{in}}{U_{ref}}\right)$$

Méthode 2 : Déduction de *N_{out}* "électronique" : charge/décharge du condensateur C + intégrales

Ici on s'appuie sur le fait que **le courant dans** R charge/décharge **le condensateur** C, donc la tension U_{ramp} varie linéairement.

Au début du cycle, on met le condensateur à zéro

On prend donc comme condition initiale : $U_{ramp}(0) = 0$

Équation de l'intégrateur (idéal)

$$U_{ramp}(t) = U_{ramp}(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t V_{in}(\tau)\, d\tau$$

où $V_{in}(t)$ est la tension appliquée au travers de R (celle sélectionnée par l'interrupteur $-U_{in}$ ou $+U_{ref}$).

Phase 1 : intégration de $-U_{in}$ pendant $T_0 = MT_{CK}$

$$U_{ramp}(t) = 0 - \frac{1}{RC}\int_0^t (-U_{in})\, d\tau = \frac{U_{in}}{RC}\, t$$

À la fin de la phase 1 ($t = T_0$) :

$$U_{ramp,top} = U_{ramp}(T_0) = \frac{U_{in}}{RC}\, T_0 = \frac{U_{in}}{RC}\, M\, T_{CK}$$

Phase 2 : désintégration avec $+U_{ref}$ pendant T_1

En repartant de la condition initiale de phase 2 : $U_{ramp}(0) = U_{ramp,top}$, on obtient :

$$U_{ramp}(t) = U_{ramp,top} - \frac{1}{RC}\int_0^t U_{ref}\, d\tau = U_{ramp,top} - \frac{U_{ref}}{RC}\, t$$

La phase 2 s'arrête quand le comparateur détecte $U_{ramp} = 0$:

$$0 = U_{ramp,top} - \frac{U_{ref}}{RC}\, T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{RC}{U_{ref}}\, U_{ramp,top}$$

En remplaçant $U_{ramp,top} = \dfrac{U_{in}}{RC} T_0$, on retrouve : $T_1 = \dfrac{U_{in}}{U_{ref}}\, T_0$

Comptage : passage du temps T_1 au nombre N_{out}

Pendant la phase 2, le compteur incrémente à chaque période T_{CK}, et on mémorise le compteur quand U_{ramp} recroise 0.

Donc :

$$N_{out} = \text{entier}\left(\frac{T_1}{T_{CK}}\right) = \text{entier}\left(M\frac{U_{in}}{U_{ref}}\right)$$

Point b)

Après le passage à zéro (fin de T_1), le signal **store** mémorise déjà N_{out}, mais dans cette implémentation la chaîne de compteurs "fixes" (modulo M) **ne sait pas s'arrêter immédiatement** : elle doit attendre la fin du cycle imposé (jusqu'à M coups d'horloge). Pendant ce **temps mort**, l'intégrateur continue d'intégrer U_{ref} : U_{ramp} passe en dessous de 0 et l'AO finit par **saturer sur son rail négatif** (zone "saturation AO en négatif" sur le chronogramme). Au final, cela **allonge le temps de conversion** et conduit à $T_{mesure} \approx 2M\, T_{CK}$ (ici $\approx 0{,}2$ s, soit ~5 mesures/s). Dans une application **voltmètre**, ce n'est pas gênant : on privilégie la stabilité/précision et l'affichage a de toute façon un temps de stabilisation.

Point d)

- le double-rampe "fait la moyenne" du signal pendant T_0 ;
- la moyenne d'un signal alternatif sur un nombre entier de périodes est nulle, donc le 50 Hz est rejeté.

Dans l'exercice, on a précisément :

$T_0 = M\, T_{CK} = 0{,}1\,\text{s}$

or la période du 50 Hz vaut $T_{50} = 20\,\text{ms}$. Ainsi : $0{,}1\,\text{s} = 5 \times 20\,\text{ms}$

=> on intègre sur **5 périodes complètes**, donc le 50 Hz s'annule.

Remarque : si T_0 n'était pas exactement un multiple de 20 ms, l'annulation ne serait pas parfaite
→ il resterait une petite erreur dépendant de la phase du parasite.

Point e)

Des notions à bien distinguer :

- **Erreur absolue** : $e_{abs} = U_{\text{mes}} - U_{\text{vrai}}$

  → s'exprime en volts (mV, µV).

- **Erreur relative** : $e_{rel} = \dfrac{U_{\text{mes}} - U_{\text{vrai}}}{U_{\text{vrai}}}$

  → c'est une erreur "en proportion" (souvent en %) : *"de combien je me trompe par rapport à la valeur mesurée"*.

  Exemple : se tromper de **1 mV** est "peu" si on mesure **200 mV** (0,5%), mais "énorme" si on mesure **2 mV** (50%).

- **Erreur systématique (biais)** : erreur qui **garde le même signe** et se répète à chaque mesure (elle **ne s'annule pas** en moyennant).

  Typiquement : un **offset** (décalage) ou une **erreur de gain**. Elle se corrige souvent par **étalonnage** (zéro et/ou gain).

Les principales causes d'erreur sur la mesure pour CAN à double rampe :

1) Imprécision de la référence U_{ref} → erreur de gain (donc erreur relative)

Le résultat dépend du rapport U_{in}/U_{ref} (car $N_{out} \propto U_{in}/U_{ref}$). Donc si U_{ref} est un peu faux, **toutes** les mesures sont "étirées" ou "compressées" : c'est une erreur **proportionnelle** à la valeur mesurée.

Note : Même si l'erreur de gain est, par nature, une erreur systématique, elle est ici exprimée sous forme de rapport (souvent en %), d'où son caractère 'relatif'.

2) Offset de l'AO intégrateur U_{io} → offset (systématique) + petite erreur relative

Un offset d'ampli-op, c'est comme si on ajoutait une petite tension continue parasite à l'intégration : même quand $U_{in} = 0$, l'intégrateur n'est pas parfaitement neutre.

Conséquences :

- **Erreur systématique (offset)** : la mesure est décalée (le "zéro" n'est plus exactement zéro).
- **Erreur relative** : en plus, on obtient une petite erreur "en %", typiquement de l'ordre de U_{io}/U_{ref}.

<u>Démonstration avec équations</u> :

- **Equation de départ (corrigé)** :

Le corrigé donne (avec $T_0 = M\,T_{CK}$) : $T_1 = T_0 \dfrac{U_{in} + U_{io}\left(1 + \frac{RC}{T_0}\right)}{U_{ref} - U_{io}}$

Donc : $N_{out} \approx \dfrac{T_1}{T_{CK}} = M \dfrac{U_{in} + U_{io}\left(1 + \frac{RC}{T_0}\right)}{U_{ref} - U_{io}}$

Et la valeur **idéale** (sans offsets) est : $N_{out,id} = M \dfrac{U_{in}}{U_{ref}}$

- **Développement pour mettre en évidence le terme idéal, l'erreur relative et l'erreur systématique** :

On suppose les offsets petits ($|U_{io}| \ll U_{ref}$) et on néglige l'arrondi "entier( )" pour voir les erreurs.

On développe le dénominateur :

$$\frac{1}{U_{ref} - U_{io}} = \frac{1}{U_{ref}} \frac{1}{1 - \frac{U_{io}}{U_{ref}}} \approx \frac{1}{U_{ref}}\left(1 + \frac{U_{io}}{U_{ref}}\right)$$

En remplaçant dans N_{out} et en gardant les termes du 1er ordre, on obtient :

$$N_{out} \approx \underbrace{M \frac{U_{in}}{U_{ref}}}_{\text{valeur idéale}} + \underbrace{M \frac{U_{in}}{U_{ref}} \frac{U_{io}}{U_{ref}}}_{\text{erreur relative (gain)}} + \underbrace{M \frac{U_{io}}{U_{ref}}\left(1 + \frac{RC}{T_0}\right)}_{\text{erreur systématique (offset)}}$$

- **Erreur relative (gain) :** $\Delta N_{rel} \approx N_{out,id}\,\dfrac{U_{io}}{U_{ref}}$

→ elle est **proportionnelle à la mesure** (multiplicative), donc c'est bien une **erreur relative** typiquement de l'ordre de $\frac{U_{io}}{U_{ref}}$.

- **Erreur systématique (offset) :** $\Delta N_{off} \approx M\dfrac{U_{io}}{U_{ref}}\left(1+\dfrac{RC}{T_0}\right)$

→ terme **indépendant de U_{in}** : même si $U_{in}=0$, on affiche une valeur non nulle ⇒ **offset** (erreur systématique). Le corrigé précise que cela revient à un offset d'entrée "à peu près égal à U_{io}" car $\frac{RC}{T_0} \ll 1$.

Donc :

U_{io} "décale le zéro" (offset) ***et*** *modifie légèrement l'échelle (gain) via le $U_{ref}-U_{io}$ au dénominateur.*

3) Offset du comparateur → erreur systématique sur l'instant d'arrêt

Le comparateur détecte "zéro". S'il a un offset, il déclenche un tout petit peu trop tôt ou trop tard → erreur sur T_1, donc sur N_{out}. Le corrigé indique que cela crée une **erreur systématique**, mais **bien plus faible** que l'offset lui-même (toujours grâce à $RC/T_0 \ll 1$).

Démonstration avec équations :

- Rappel valeur idéale (comparateur parfait)

Sans offset, la phase 2 s'arrête quand $U_{ramp}=0$, d'où : $N_{out,\,id}=\dfrac{T_1}{T_{CK}} \approx M\,\dfrac{U_{in}}{U_{ref}}$

- Avec offset du comparateur : pourquoi cela crée un décalage (**erreur systématique**)

Si le comparateur a un offset U_{io}, il ne "voit" plus le zéro au bon niveau : il déclenche quand

$$U_{ramp}=U_{io} \quad \text{au lieu de} \quad U_{ramp}=0$$

Le corrigé montre alors :

$$T_1=\frac{RC}{U_{ref}}\left(U_{ramp,top}-U_{io}\right)=\frac{U_{in}}{U_{ref}}\,T_0\;-\;\frac{U_{io}}{U_{ref}}\,RC$$

En divisant par T_{CK} (et en utilisant $T_0=M\,T_{CK}$), on obtient :

$$N_{out} \approx \underbrace{M\frac{U_{in}}{U_{ref}}}_{\text{valeur idéale}} \;+\; \underbrace{\left(-\,M\,\frac{RC}{T_0}\,\frac{U_{io}}{U_{ref}}\right)}_{\text{erreur systématique (offset) sur } N_{out}}$$

C'est exactement la forme donnée par le corrigé : $N_{out}=\text{entier}\left(M\frac{U_{in}}{U_{ref}}-M\frac{RC}{T_0}\frac{U_{io}}{U_{ref}}\right)$

- On peut toujours exprimer cette erreur 'systématique' comme une 'erreur relative'

L'**erreur relative** se déduit naturellement comme "erreur / valeur idéale" :

- Erreur en comptes : $\Delta N = N_{out}-N_{out,id} \approx -\,M\,\dfrac{RC}{T_0}\,\dfrac{U_{io}}{U_{ref}}$
- Erreur relative sur N_{out} (ou sur U_{in}) : $e_{rel} \approx \dfrac{\Delta N}{N_{out,id}} = -\dfrac{U_{io}}{U_{in}}\,\dfrac{RC}{T_0}$

Interprétation : c'est une erreur relative **plus grande quand U_{in} est petit** (puisqu'on divise par U_{in}), ce qui est typique d'un **offset**.